

**ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ  
Γ' ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ  
Δευτέρα 11 Ιουνίου 2018  
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:  
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ**

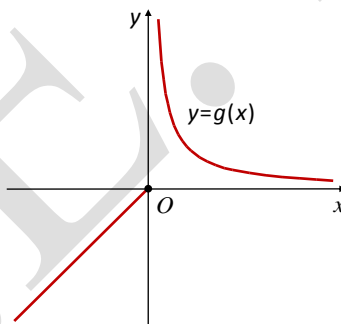
(Ενδεικτικές Απαντήσεις)

**ΘΕΜΑ Α**

**A1.** Απόδειξη θεωρήματος σελ. 99 σχολικού βιβλίου.

**A2. α.** Ψευδής

**β.** Θεωρούμε τη συνάρτηση  $g(x) = \begin{cases} x, & x \leq 0 \\ \frac{1}{x}, & x > 0 \end{cases}$  η οποία έχει γραφική παράσταση (σχήμα σχολικού βιβλίου σελ.35):



Η  $g(x)$  είναι συνάρτηση «1 – 1» στο  $A_g = \mathbb{R}$  αλλά δεν είναι γνησίως μονότονη στο  $A_g$  αφού είναι γνησίως αύξουσα στο  $(-\infty, 0]$  και γνησίως φθίνουσα στο  $(0, +\infty)$  όπως φαίνεται από το παραπάνω σχήμα.

**A3.** Διατύπωση θεωρήματος σελ. 216 σχολικού βιβλίου.

**A4. α.** Λάθος (σελ. 33 σχ. βιβλίου)

**β.** Λάθος (σχόλιο σελ. 136 σχ. βιβλίου)

**γ.** Σωστό (τύπος σελ. 53 σχ. βιβλίου)

**δ.** Σωστό (σελ. 37 σχ. βιβλίου)

**ε.** Σωστό (σελ. 17 σχ. βιβλίου)

**ΘΕΜΑ Β**

**B1.** Ισχύει :  $A_f = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

Η  $f(x)$  είναι παραγωγίσιμη στο  $A_f$  ως άθροισμα παραγωγίσιμων συναρτήσεων (άθροισμα πολωνυμικής με ρητή) με:

$$f'(x) = \left(x - \frac{4}{x^2}\right)' = (x)' - 4\left(\frac{1}{x^2}\right)' = 1 - 4\left[-\frac{1}{(x^2)^2}(x^2)'\right] =$$

$$= 1 + \frac{4}{x^4} \cdot 2x = 1 + \frac{8}{x^3} = \frac{x^3 + 8}{x^3}$$




Επίσης :

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x^3 + 8}{x^3} = 0 \Leftrightarrow x^3 + 8 = 0 \Leftrightarrow x^3 = -8 \Leftrightarrow x = -2$$

και

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{x^3 + 8}{x^3} > 0 \Leftrightarrow x^3(x^3 + 8) > 0$$

Επομένως

$x$	$-\infty$	$-2$	$0$	$+\infty$
$x^3$	-	-		+
$x^3 + 8$	-	○	+	+
$f'(x)$	+	○	-	+
$f(x)$				

Άρα η  $f(x)$  είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα  $(-\infty, -2]$ ,  $(0, +\infty)$  ενώ είναι γνησίως φθίνουσα στο  $[-2, 0)$

Η  $f$  παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στη θέση  $x_0 = -2$  με τιμή:

$$f(-2) = -2 - \frac{4}{(-2)^2} = -2 - \frac{4}{4} = -2 - 1 = -3$$

**B2.** Η  $f'(x) = 1 + \frac{8}{x^3}$  είναι παραγωγίσιμη στο  $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$  ως ρητή με

$$f''(x) = (1)' + \left(\frac{8}{x^3}\right)' = 8\left(\frac{1}{x^3}\right)' = 8\left[-\frac{1}{(x^3)^2}(x^3)'\right] = -\frac{8}{x^6} \cdot 3x^2 = -\frac{24}{x^4} < 0$$

για κάθε  $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

Άρα  $f''(x) < 0$  για κάθε  $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$  οπότε η  $f(x)$  είναι κοίλη στο  $(-\infty, 0)$  και στο  $(0, +\infty)$ .

**B3. Κατακόρυφη ασύμπτωτη θα αναζητήσουμε :** στο  $x_0 = 0$  οπότε:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left( x - \frac{4}{x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x - \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{4}{x^2} = 0 - 4 \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^2} = -\infty \text{ αφού } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^2} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left( x - \frac{4}{x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^-} x - \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{4}{x^2} = 0 - 4 \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^2} = -\infty$$

Άρα η ευθεία  $\boxed{x=0}$  είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της  $C_f$ .

Εξετάζουμε αν η  $C_f$  έχει πλάγια ασύμπτωτη στο  $-\infty$  μια ευθεία  $(\varepsilon)$  της μορφής

$$(\varepsilon): y = \lambda x + \beta \text{ όπου } \lambda = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} \text{ και } \beta = \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - \lambda x]$$

$$\text{Τότε } \lambda = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x - \frac{4}{x^2}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 - 4}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 - 4}{x^3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3}{x^3} = 1,$$

δηλαδή  $\boxed{\lambda = 1}$

$$\text{και } \beta = \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - \lambda x] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( x - \frac{4}{x^2} - x \right) = - \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4}{x^2} = 0, \text{ άρα } \boxed{\beta = 0}$$

Τότε η ευθεία  $(\varepsilon): y = 1x + 0 \Rightarrow \boxed{y = x}$  είναι πλάγια ασύμπτωτη της  $C_f$  στο  $-\infty$ .

Εξετάζουμε αν η  $C_f$  έχει πλάγια ασύμπτωτη στο  $+\infty$  μια ευθεία  $(\varepsilon)$  της μορφής

$$y = \lambda x + \beta \text{ όταν } \lambda = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} \text{ και } \beta = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - \lambda x].$$

$$\text{Τότε } \lambda = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - \frac{4}{x^2}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 - 4}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 - 4}{x^3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{x^3} = 1$$

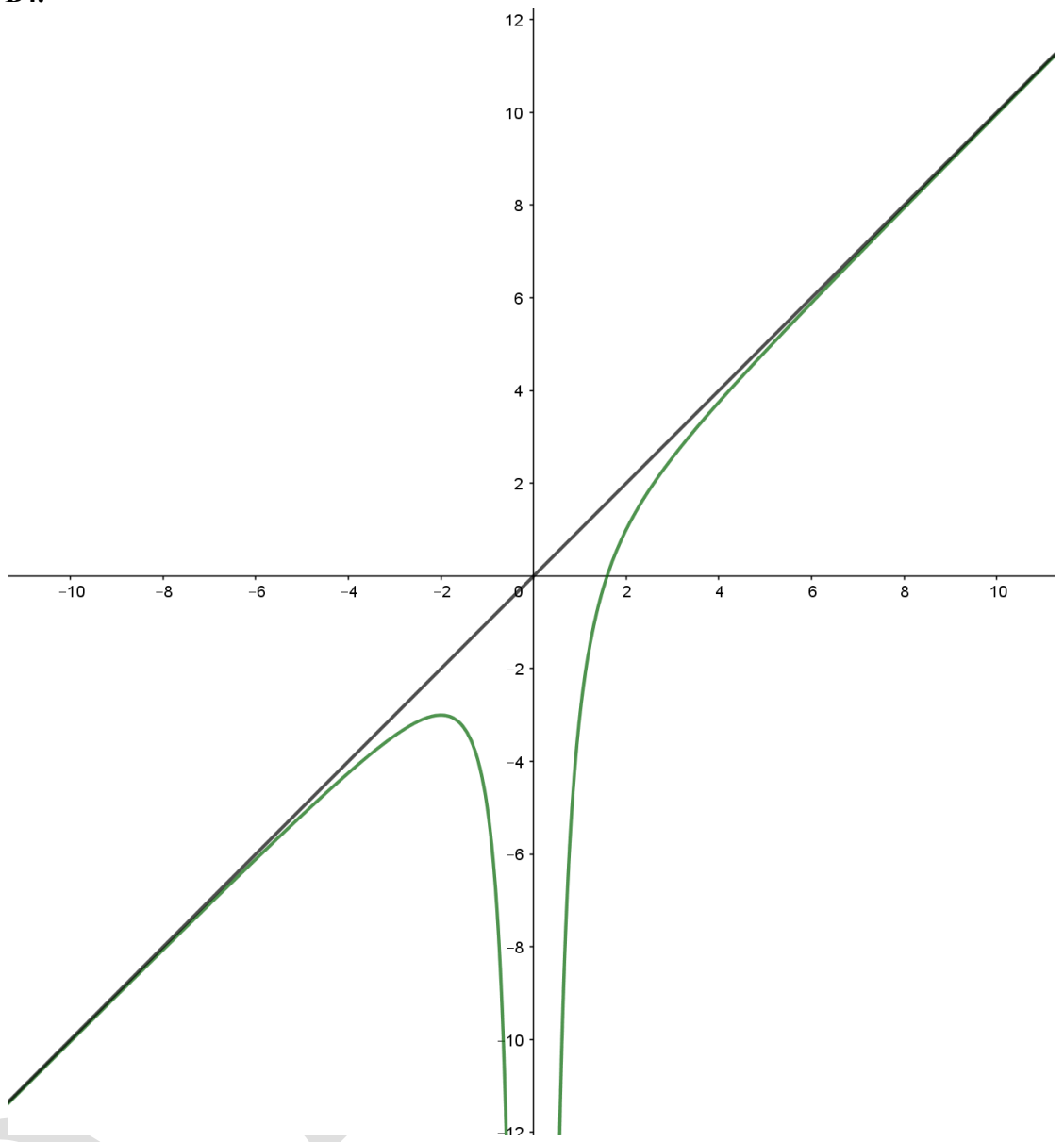
δηλαδή  $\boxed{\lambda = 1}$  και

$$\beta = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - \lambda x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( x - \frac{4}{x^2} - x \right) = -4 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = -4 \cdot 0 = 0$$

δηλαδή  $\boxed{\beta = 0}$

Άρα η ευθεία δηλαδή  $(\varepsilon): \boxed{y = x}$  είναι πλάγια ασύμπτωτη της  $C_f$  στο  $+\infty$

**B4.**



**ΘΕΜΑ Γ**

**Γ1.** Η πλευρά του τετραγώνου θα έχει μήκος  $\frac{x}{4}$  m και το μήκος του κύκλου θα είναι  $(8-x)$  m οπότε ο κύκλος θα έχει ακτίνα  $\frac{8-x}{2\pi}$  m.

Άρα, το εμβαδόν του τετραγώνου είναι

$$E_{\tau} = \left(\frac{x}{4}\right)^2 = \frac{x^2}{16} \text{ m}^2.$$

και το εμβαδόν του κύκλου είναι ίσο με

$$E_{\kappa} = \pi \left(\frac{8-x}{2\pi}\right)^2 = \frac{(8-x)^2}{4\pi} \text{ m}^2$$

Το άθροισμα των εμβαδών των δύο σχημάτων είναι:

$$E(x) = \frac{x^2}{16} + \frac{(8-x)^2}{4\pi} = \frac{(\pi+4)x^2 - 64x + 256}{16\pi}, \text{ με } 0 < x < 8$$

**Γ2.** Η  $E(x)$  είναι συνεχής ως πολυωνυμική στο  $(0,8)$  και παραγωγίσιμη στο διάστημα αυτό με:

$$E'(x) = \frac{2(\pi+4)x - 64}{16\pi}$$

$$E'(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{32}{\pi+4}$$

Το πρόσημο της  $E'(x)$  και η μονοτονία της  $E(x)$  φαίνονται στον ακόλουθο πίνακα τιμών:

$x$	$-\infty$	0	$\frac{32}{\pi+4}$	8	$+\infty$
$E'(x)$			- 0 +		
$E(x)$			$\swarrow$ $\underline{\text{τ.ελ.}}$ $\searrow$		

Άρα, το άθροισμα των εμβαδών των δύο σχημάτων γίνεται ελάχιστο για  $x = \frac{32}{\pi+4}$ , που είναι η πλευρά του τετραγώνου όταν ισούται με την διάμετρο του κύκλου αφού:

$$\frac{x}{4} = 2 \frac{8-x}{2\pi} \Leftrightarrow x = \frac{32}{\pi+4}$$

**Γ3.** Αρκεί να δείξω ότι η εξίσωση  $E(x) = 5$  έχει μοναδική λύση για  $x \in (0, 8)$ .

Η  $E(x)$  είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο  $\Delta_1 = \left(0, \frac{32}{\pi+4}\right)$  οπότε

$$E(\Delta_1) = \left( \lim_{x \rightarrow \frac{32}{\pi+4}^-} E(x), \lim_{x \rightarrow 0^+} E(x) \right) = \left( \frac{16}{\pi+4}, \frac{16}{\pi} \right)$$

Η  $E(x)$  είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο  $\Delta_2 = \left[\frac{32}{\pi+4}, 8\right)$  οπότε

$$E(\Delta_2) = \left[ E\left(\frac{32}{\pi+4}\right), \lim_{x \rightarrow 8^-} E(x) \right) = \left[ \frac{16}{\pi+4}, 4 \right)$$

Αφού το  $5 \in E(\Delta_1)$  τότε η εξίσωση  $E(x) = 5$  έχει μία τουλάχιστον λύση στο  $\Delta_1$ , η οποία είναι μοναδική αφού  $E(x)$  γνησίως φθίνουσα στο  $\Delta_1$ .

Τέλος το  $5 \notin E(\Delta_2)$  άρα η εξίσωση  $E(x) = 5$  είναι αδύνατη στο  $\Delta_2$ .

### ΘΕΜΑ Δ

**Δ1.** Η  $f$  είναι 2 φορές παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$  ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με:

$$f'(x) = 2e^{x-\alpha} - 2x \text{ και } f''(x) = 2e^{x-\alpha} - 2.$$

Λύνω την  $f''(x) \geq 0 \Rightarrow 2e^{x-\alpha} - 2 \geq 0 \Rightarrow e^{x-\alpha} \geq 1 \Rightarrow x - \alpha \geq 0 \Rightarrow x \geq \alpha$

$x$	$-\infty$	$\alpha$	$+\infty$
$f''(x)$	$-$	$0$	$+$
$f(x)$	↘		↗

Άρα η  $f$  παρουσιάζει μοναδικό σημείο καμπής στο  $A(\alpha, f(\alpha))$ .

**Δ2.** Είναι

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f'(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (2e^{x-\alpha} - 2x) = +\infty,$

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (2e^{x-\alpha} - 2x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ e^x \left( \frac{2}{e^\alpha} - \frac{2x}{e^x} \right) \right] = (+\infty) \left( \frac{2}{e^\alpha} - 0 \right) = +\infty,$  διότι

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} \stackrel{\text{DLH}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x} = 0.$$

Σύμφωνα με τον παραπάνω πίνακα προσήμων της  $f''$ , προκύπτει ότι η  $f'$  είναι γνησίως φθίνουσα στο  $(-\infty, \alpha]$  και γνησίως αύξουσα στο  $[\alpha, +\infty)$ .

Στο  $\Delta_1 = (-\infty, \alpha]$  η  $f'$  είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής οπότε

$$f'(\Delta_1) = \left[ f'(\alpha), \lim_{x \rightarrow -\infty} f'(x) \right) = [2 - 2\alpha, +\infty).$$

Στο  $\Delta_2 = (\alpha, +\infty)$  η  $f'$  είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής, οπότε

$$f'(\Delta_2) = \left( \lim_{x \rightarrow \alpha^+} f'(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) \right) = (2 - 2\alpha, +\infty).$$

Αφού  $2 - 2\alpha = 2(1 - \alpha) < 0$  προκύπτει ότι:

- $0 \in f'(\Delta_1)$  οπότε η εξίσωση  $f'(x) = 0$  έχει μία τουλάχιστον ρίζα  $x_1 \in \Delta_1$ , η οποία είναι μοναδική αφού η  $f'$  είναι γνησίως φθίνουσα στο  $\Delta_1$ .
- $0 \in f'(\Delta_2)$  οπότε η εξίσωση  $f'(x) = 0$  έχει μία τουλάχιστον ρίζα  $x_2 \in \Delta_2$ , η οποία είναι μοναδική αφού η  $f'$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $\Delta_2$ .

Σύμφωνα με τα παραπάνω

- για  $x < x_1 \Rightarrow f'(x) > f'(x_1) \Rightarrow f'(x) > 0$ ,
- για  $x_1 < x < \alpha \Rightarrow f'(x_1) > f'(x) \Rightarrow f'(x) < 0$ ,
- για  $\alpha < x < x_2 \Rightarrow f'(x) < f'(x_2) \Rightarrow f'(x) < 0$ ,
- για  $x > x_2 \Rightarrow f'(x) > f'(x_2) \Rightarrow f'(x) > 0$ .

Σχηματίζουμε τον παρακάτω πίνακα

$x$	$-\infty$	$x_1$	$\alpha$	$x_2$	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$		τ.μ.		τ.ελ.	

Άρα η  $f$  παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο  $x = x_1$  και τοπικό ελάχιστο στο  $x = x_2$ .

**43.**

$$f(x) = f(1), x > \alpha > 1$$

$$\text{Άρα: } 2e^{x-\alpha} - x^2 = 2e^{x-1} - 1 \Leftrightarrow 2e^{x-\alpha} - 2e^{x-1} = x^2 - 1 \quad (1)$$

Εφόσον  $x > \alpha > 1$  η παράσταση  $x^2 - 1$  είναι μεγαλύτερη του μηδενός οπότε από την σχέση (1)

$$2e^{x-\alpha} - 2e^{x-1} > 0 \Leftrightarrow 2e^{x-\alpha} > 2e^{x-1} \Leftrightarrow e^{x-\alpha} > e^{x-1} \Leftrightarrow x - \alpha > x - 1 \Leftrightarrow \alpha < 1$$

άτοπο

**44.** Για  $\alpha = 2$ :  $f(x) = 2e^{x-2} - x^2$  και  $f'(x) = 2e^{x-2} - 2x$ .

Η εξίσωση της εφαπτομένης της  $C_f$  στο  $x_0 = 2$  είναι η

$$y - f(2) = f'(2)(x - 2) \Rightarrow y + 2 = -2(x - 2) \Rightarrow y = -2x + 2$$

Αφού η  $f$  είναι κυρτή στο  $[2, +\infty)$  τότε η εξίσωση της εφαπτομένης βρίσκεται κάτω από την  $C_f$  με εξαίρεση το σημείο επαφής, δηλαδή  $f(x) \geq y \Rightarrow f(x) \geq -2x + 2$  με την ισότητα να ισχύει μόνο για  $x = 2$ .

Άρα για  $x \geq 2$  είναι  $f(x) \geq -2x + 2 \stackrel{\cdot \sqrt{x-2} \geq 0}{\Leftrightarrow} f(x) \cdot \sqrt{x-2} \geq (-2x + 2)\sqrt{x-2}$ .

Αφού οι συναρτήσεις  $f(x) \cdot \sqrt{x-2}$  και  $(-2x + 2)\sqrt{x-2}$  είναι συνεχείς στο  $[2, +\infty)$  και η ισότητα ισχύει μόνο για  $x = 2$ , τότε

$$\int_2^3 f(x) \cdot \sqrt{x-2} dx > \int_2^3 (-2x + 2)\sqrt{x-2} dx.$$

Για το  $\int_2^3 (-2x + 2)\sqrt{x-2} dx$  θέτω  $\sqrt{x-2} = u \Leftrightarrow x-2 = u^2$

Τότε  $dx = 2udu$  και

- για  $x = 2$  είναι  $u = 0$ ,
- για  $x = 3$  είναι  $u = 1$ .

Άρα,

$$\begin{aligned} \int_2^3 (-2x + 2)\sqrt{x-2} dx &= \int_0^1 [-2(u^2 + 2) + 2] u \cdot 2udu = \int_0^1 (-2u^2 - 2) 2u^2 du = \\ &= \int_0^1 (-4u^4 - 4u^2) du = \left[ -4 \cdot \frac{u^5}{5} - 4 \cdot \frac{u^3}{3} \right]_0^1 = -\frac{4}{5} - \frac{4}{3} = -\frac{12}{15} - \frac{20}{15} = -\frac{32}{15} \end{aligned}$$

Επομένως  $\int_2^3 f(x) \cdot \sqrt{x-2} dx > -\frac{32}{15}$ .